

# 3D-EFIT-Modellierung elastischer Wellen in anisotropen Medien

Prashanth Kumar CHINTA, Klaus MAYER, Karl-Jörg LANGENBERG  
Fachgebiet Theorie der Elektrotechnik und Photonik, Universität Kassel,  
Wilhelmshöher Allee 71, Kassel

**Kurzfassung.** Die zerstörungsfreie Prüfung (NDT) von Bauteilen wie z. B. Strukturen mit Schweißnähten ist wichtig, um deren Qualität zu gewährleisten. Die dabei auftretende elastische Wellenausbreitung in anisotropen Materialien im Volumen ist wegen der möglichen Kristallorientierungen und der Polarisation verschiedener Wellenmoden sehr komplex und bei dem Auftreten von Inhomogenitäten nur schwer zu verstehen. Auftretende Wellentypen können jedoch durch die dreidimensionale elastodynamische Finite Integrationstechnik (3D-EFIT) [1] effizient modelliert werden. Im vorliegenden Beitrag werden die Validierung eines anisotropen 3D-EFIT-Tools und entsprechende Simulationsergebnisse an Schweißnahtstrukturen präsentiert. Dies wird durch den Vergleich der Modellierung mit einer analytischen Lösung basierend auf der Radon-Transformation durchgeführt. Als Anwendungsbeispiel dient eine Schweißnaht aus austenitischem Stahl, die eine hexagonale Kristallstruktur besitzt und zwei isotrope Stahlblöcke miteinander verbindet. Wegen der Polarisation von elastischen Wellen in hexagonalen Kristallstrukturen werden diese als transversal-isotrop bezeichnet. In solchen Materialien existieren Quasi-Druckwellen (qP), vertikale polarisierte Quasi-Scher- (qSV) und horizontal polarisierte Scher- (SH) Wellen. Die Ausbreitung dieser Wellentypen kann in den Simulationsergebnissen analysiert werden. Um die Bauteilgeometrie räumlich zu begrenzen, ohne dass an den Rändern Wellenreflexionen auftreten, ist die Convolutional Perfectly Matched Layer- (CPML) Technik implementiert. Als Prüfkopf wird ein Winkelprüfkopf (MKW45-2) eingesetzt und simuliert, der in den isotropen Teil der Geometrie eine 45°-Scherwelle aussendet. Die Ausbreitung und Streuung der Wellen ist in Form von Zeitschnappschüssen und B-Scans dargestellt.

## Einleitung

Die elastische Wellenausbreitung in inhomogenen anisotropen Medien ist wegen der Orts- und Richtungsabhängigkeit des elastischen Steifigkeitstensors nur schwer vorstellbar. Dabei werden die auftretenden Ausbreitungsphänomene mit wachsender Anzahl von unabhängigen Elastizitätskonstanten immer schwieriger verständlich. In solchen Materialien ist die Energiegeschwindigkeit anders als in isotropen Materialien polarisiert. Die Streuung von elastischen Wellen kann durch numerische Modellierung anschaulich gemacht werden.

Geometrien, die anisotrope Materialien mit zwei- oder dreidimensionalen Inhomogenitäten (z. B. Fehlstellen bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung) beinhalten, verlangen eine dreidimensionale Modellierung der Wellenausbreitung. Die dreidimensionale Elastische Finite Integrationstechnik (3D-EFIT) ist ein Werkzeug, das zu diesem Zweck entwickelt wurde. Die Detektion von räumlich verteilten Rissen in inhomogenen Geometrien kann effizient mit 3D-EFIT modelliert werden. In diesem Papier werden eine Validierung von 3D-EFIT für homogene anisotrope Medien und Anwendungen hierzu präsentiert.

Abschnitt 1 enthält eine kurze Einführung in die 3D-EFIT-Technik. In Abschnitt 2 wird eine Validierung von 3D-EFIT für homogene anisotrope Medien vorgestellt und in Abschnitt 3 werden Beispiele von 3D-EFIT, wie die austenitische Schweißnahtmodellierung und die elastische Wellenausbreitung in Kiefernholz, gegeben. In Abschnitt 4 werden einige Schlussfolgerungen und zukünftige Aufgaben diskutiert.

## 1. Die Grundgleichungen der linearen Elastodynamik

Die Basisgleichungen der Elastodynamik bestehen aus der Newton-Cauchy-Gleichung (Gl. 1) und der Deformationsratengleichung (Gl. 2). Eine Umstellung der Gleichungen unter Benutzung von Materialgleichungen (Newtons Impulserhaltungssatz und verallgemeinertes Hook'sches Gesetz [2])

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{j}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t} = \nabla \square \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \{ \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + [\nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)]^{21} \} + \underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{R}}, t) \quad (2)$$

führt uns zu den sogenannten Navier-Gleichungen (Gl. 3). Im homogenen Fall führt uns die Einsetzung von harmonischen ebenen Wellen für den Teilchenverschiebungsvektor zu der Kelvin-Christoffel-Gleichung (Gl. 4), die uns ein Eigenwertproblem definiert. Die Lösung dieses Eigenwertproblems durch die Verwendung der Charakteristischen Gleichung ( $\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{k}}, \omega) = \underline{\mathbf{0}}$ ) liefert uns die Phasengeschwindigkeiten ( $c_{\text{ph}}$ ) von drei verschiedenen orthogonalen Moden und ihre zugehörigen Polarisation. Die Gruppengeschwindigkeit wird aus der Dispersionsrelation bestimmt (s. Gl. 5) [4,5].

$$\rho(\underline{\mathbf{R}}) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t^2} = \nabla \square \underline{\mathbf{c}}(\underline{\mathbf{R}}) : \nabla \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\underbrace{(\hat{\underline{\mathbf{k}}} \square \underline{\mathbf{c}} \square \hat{\underline{\mathbf{k}}} - \rho c_{\text{ph}}^2(\hat{\underline{\mathbf{k}}}) \underline{\mathbf{I}})}_{\underline{\mathbf{w}}(\underline{\mathbf{k}}, \omega)} \square \hat{\underline{\mathbf{u}}}(\hat{\underline{\mathbf{k}}}) = \underline{\mathbf{0}} \quad (4)$$

$$\underline{c}_{\text{gr}}(\hat{\underline{\mathbf{k}}}) = \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\mathbf{k}}} \quad (5)$$

Das Modellierungswerkzeug EFIT basiert auf den Integralgleichungen der Elastodynamik (Gl. 6 und Gl. 7). In Gleichung 1 und 2 sind der Kraftdichtenvektor  $\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$  und der induzierte Deformationsratentensor  $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$  jeweils die Quellterme. EFIT benutzt ein duales orthogonales Gridsystem und verwendet den „marching on in time algorithm“ [6], wobei der Geschwindigkeitsvektor ( $\underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ ) und der elastische Spannungstensor ( $\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$ ) in einer „leapfrog“-Technik berechnet werden. Die räumliche und zeitliche Diskretisierung wird unter Berücksichtigung von Stabilitätsbedingungen für EFIT durchgeführt und in die 3D-EFIT-Simulationssoftware eingespeist. Die Materialparameter – Massendichte ( $\rho(\underline{\mathbf{R}})$ ) und Nachgiebigkeitstensor ( $\underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{R}})$ ) – bestimmen die Materialeigenschaften und führen zu den verschiedenen elastischen Wellenmoden im Material.

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho(\underline{\mathbf{R}}) \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t) dV &= \iint_{S=\partial V} \underline{\mathbf{n}} \square \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t) dS + \iiint_V \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{R}}, t) dV \\ \iiint_V \underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{R}}) : \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{R}}, t) dV &= \iint_{S=\partial V} \text{sym}\{\underline{\mathbf{n}} \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{R}}, t)\} dS + \iiint_V \underline{\mathbf{h}}(\underline{\mathbf{R}}, t) dV \end{aligned} \quad (6)$$

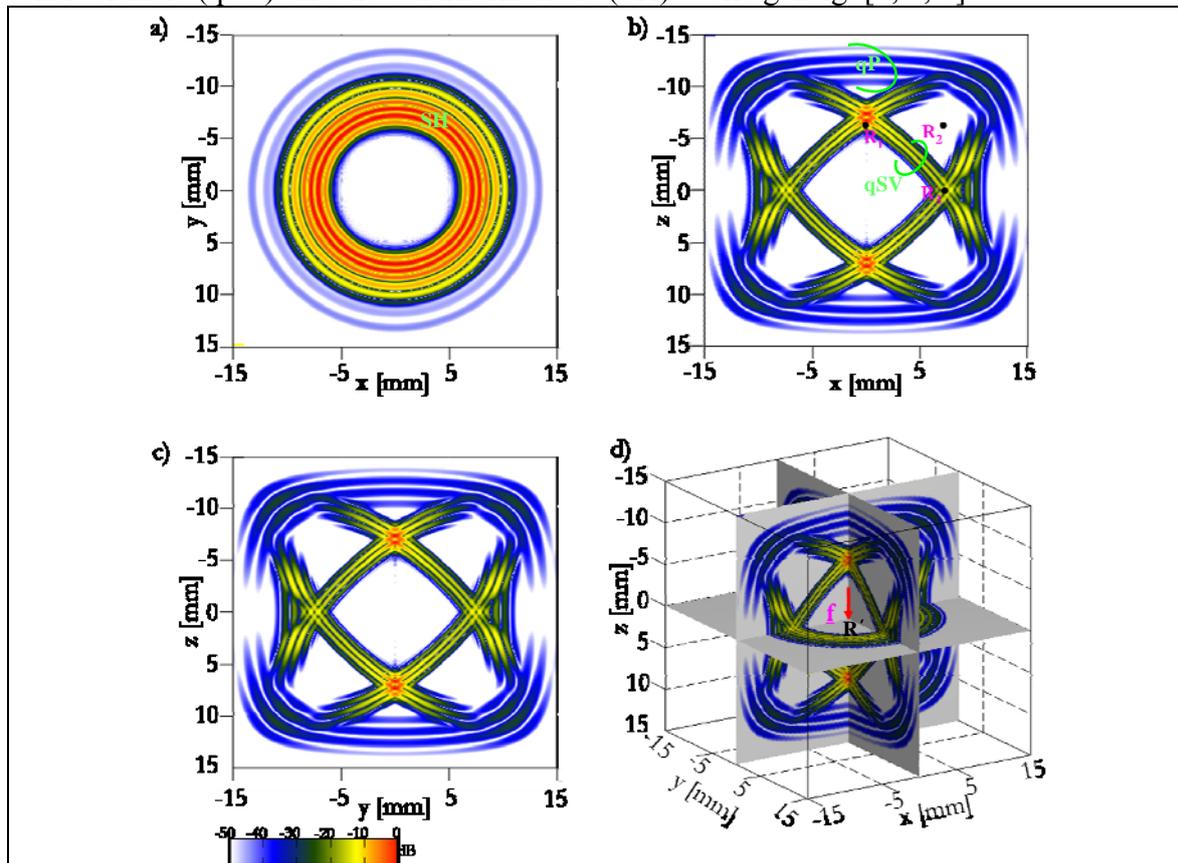
## 2. Validierung von 3D-EFIT durch eine analytische Lösung

Die Validierung von 3D-EFIT ist hier durch den Vergleich von Zeitsignalen durchgeführt, die an beliebigen Raumpunkten berechnet werden, wenn eine Anregung durch eine impulsförmige Quelle im Ursprung erfolgt ( $R'(x,y,z) = R'(0,0,0)$ ).

Eine bandbegrenzte dreidimensionale Greensche Funktion wird durch 3D-EFIT und durch eine analytische Lösung [2] berechnet. Die analytische Lösung basiert auf der Anwendung der Radon-Transformation auf die sogenannte Kelvin-Christoffel-Gleichung (s. Gl. 4). Diese analytische Lösung der Greenschen Funktion ist gemäß einer Theorie aus [3] berechnet.

### 2.1 Validierung für homogen-transversalisotrope Medien

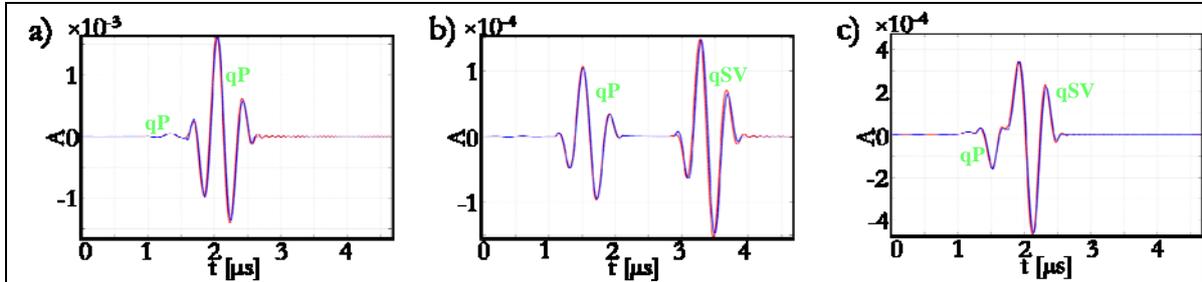
Die Greensche Funktion in austenitischem Stahl ist numerisch durch 3D-EFIT berechnet. Eine punktförmige Anregung ( $\mathbf{f}$ ) ist im Ursprung  $R'(0, 0, 0)$  vertikal, d. h. parallel zur Kristallorientierung eingebracht. Ein bandbegrenzter  $RC_2$ -Impuls mit einer Mittenfrequenz von 2 MHz dient zur Anregung. Eine Momentanaufnahme des elastischen Wellenfeldes (Snapshot) ist in Bild 1 wiedergegeben. Es sind hier die Quasi-Druckwelle (qP), die quasi-schervertikale (qSV) und die scherhorizontale (SH) Welle gezeigt [4, 5, 6].



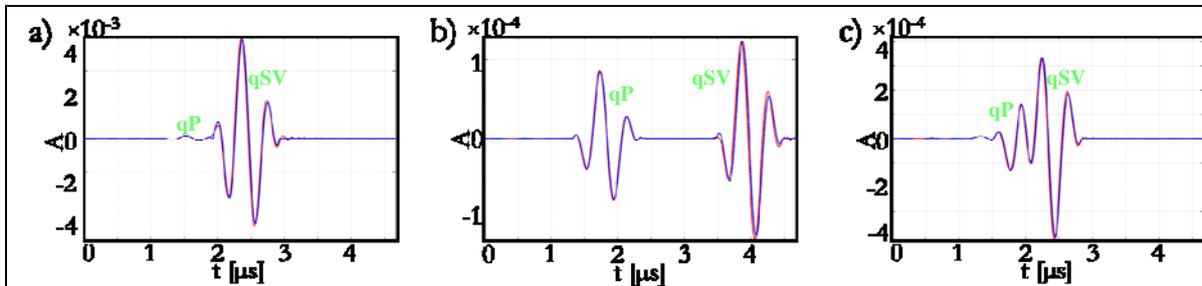
**Abbildung 1:** 3D-EFIT-Ergebnis: Zeitbereichs-Momentaufnahmen in Ebenen mit gemeinsamem Schnittpunkt im Quellpunkt sind in a), b) und c) dargestellt. Die räumliche Anordnung der Ebenen im Volumen ist in d) gezeigt.

Zum Vergleich werden Zeitsignale der  $v_3$ -Komponente des Geschwindigkeitsvektors ( $\mathbf{v}$ ) der Teilchenverschiebung zufällig an ausgewählten Raumpunkten  $R_1$  (entlang der z-Achse),  $R_2$  (in der xz-Ebene, aber nicht auf den Hauptachsen) und  $R_3$  (entlang der x-Achse, in der xz-Ebene) aufgezeichnet. Die Berechnung der analytischen Lösung erfolgte an den gleichen Koordinatenpunkten. Der Vergleich ist in Bild 2 und Bild 3 dargestellt. In

diesen Bildern korrespondieren die roten Zeitsignale mit der 3D-EFIT-Lösung und die blauen Signale mit der analytischen Lösung. Man kann eine sehr gute Übereinstimmung erkennen. Der Zeitverlauf und die Amplitude sind in dieser Darstellung kaum voneinander zu unterscheiden. Damit stimmt auch die Energieverteilung der Welle sehr gut für beide Berechnungsmethoden überein, wenn die Anregung in vertikaler Richtung erfolgt.



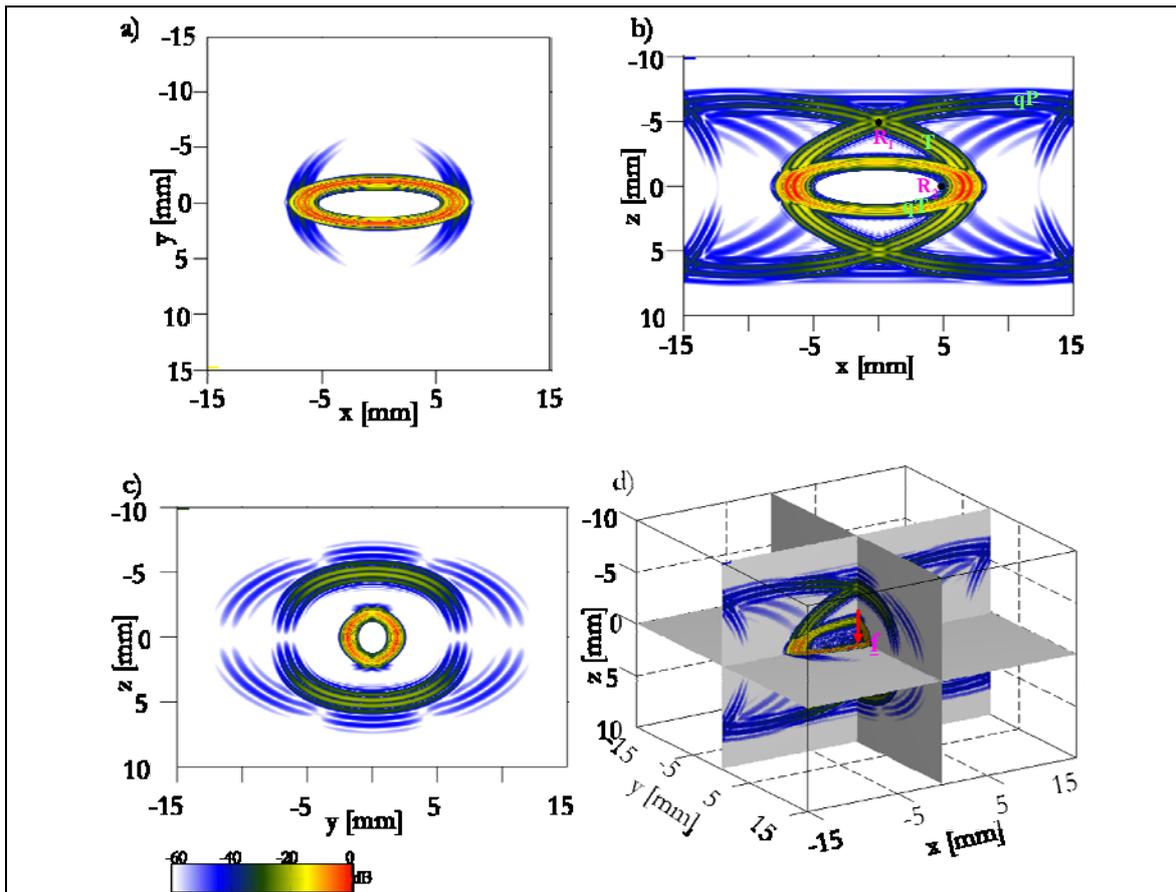
**Abbildung 2:** Zeitbereichssignal mit linearer Skala, aufgezeichnet bei a)  $R_1(0, 0, 5)$ , b)  $R_2(0, 0, 5)$  und c)  $R_3(0, 0, 5)$ . Die Koordinateneinheiten sind in mm angegeben.



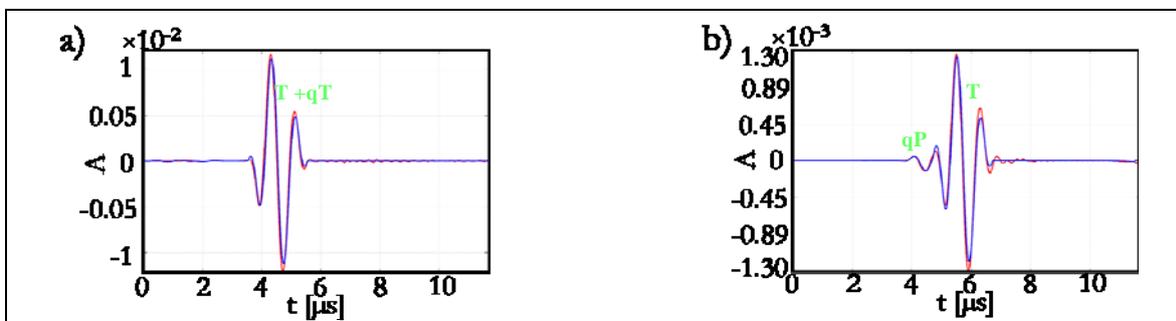
**Abbildung 3:** Zeitbereichssignal mit linearer Skala, aufgezeichnet bei a)  $R_1(0, 0, 6)$ , b)  $R_2(0, 0, 6)$  und c)  $R_3(0, 0, 6)$  (Koordinateneinheit: mm)

## 2.2 Validierung für homogene orthotrope Medien

Elastische Elementarwellen im dreidimensionalen Raum (Greensche Funktion) sind für orthotrope Materialien (z. B. die Holzart Fichte hat diese Eigenschaft [7, 8]) numerisch mit 3D-EFIT berechenbar. Das Beispiel zeigt die Wirkung einer Punktquelle ( $\mathbf{f}$ ), die im Ursprung  $R(0, 0, 0)$  eine Anregung in vertikaler Richtung (hier die z-Richtung) auslöst. Die Form des Signals ist wiederum ein RC2-Impuls mit 1 MHz Mittenfrequenz. Die benutzten Materialparameter dieser Simulation sind im Anhang angegeben. Die Momentanaufnahmen der elastischen Wellenausbreitung sind in Bild 4 dargestellt. Es sind hier die Quasi-Druckwelle (qP), die Quasi-Transversal- (qT) und die Transversalwelle (T) in Bild 4b gezeigt. Die  $v_3$ -Komponente des Zeitsignals des Teilchengeschwindigkeitvektors ist an der Position  $R_1$  (entlang der z-Achse) und bei  $R_2$  (entlang der x-Achse) in der xz-Ebene aufgezeichnet. Die analytischen Lösungen sind an den gleichen Punkten berechnet. Der Vergleich ist in Bild 5 dargestellt. (Rot entspricht wiederum der 3D-EFIT- und blau der analytischen Lösung). Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Lösungsmethoden.



**Abbildung 4:** D-EFIT-Ergebnis: Zeitbereichs-Momentaufnahmen in Ebenen mit gemeinsamem Schnittpunkt im Quellpunkt sind in a), b) und c) dargestellt. Die räumliche Anordnung der Ebenen im Volumen ist in d) gezeigt.



**Abbildung 5:** Zeitbereichssignal mit linearer Skala, aufgezeichnet bei a)  $R_1(0, 0, 6)$  b)  $R_2(0, 0, 6)$  und c)  $R_3(0, 0, 6)$  (Koordinateneinheit: mm)

### 3. Anwendungsbeispiele der Modellierung mit 3D-EFIT

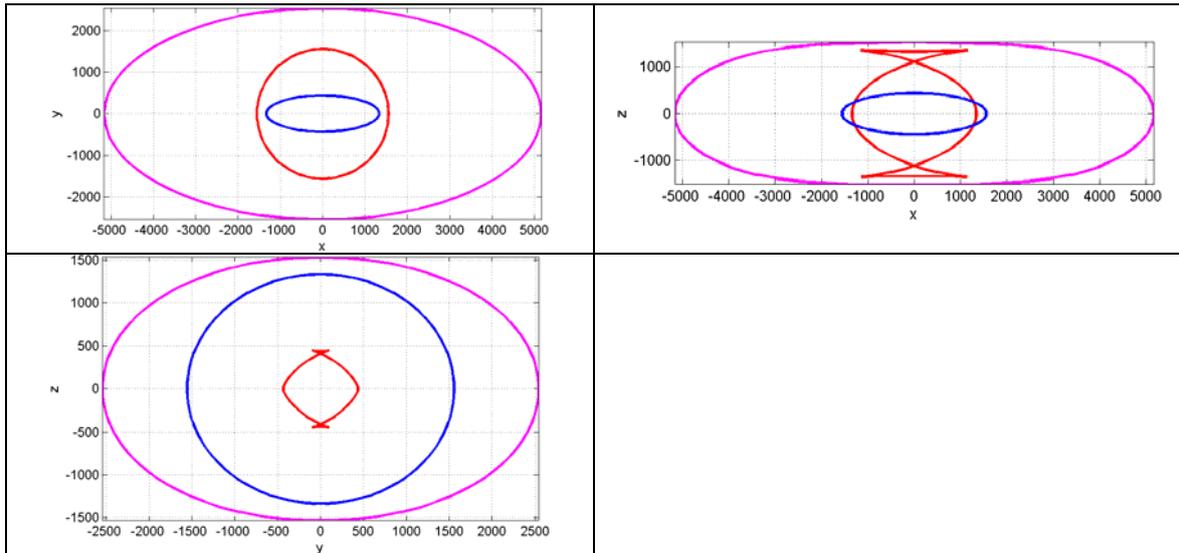
#### 3.1 Modellierung der Wellenausbreitung in austenitischen Schweißnähten mit 3D-EFIT

Zur Modellierung von austenitischen Schweißnähten wurde eine Geometrie nach Abbildung 6a angenommen. Es wurden zwei Stahlblöcke durch eine austenitische Schweißnaht verbunden. Um an den Rändern der Geometrie die Wellenausbreitung auslaufen zu lassen, wurde an der rechten und linken Seite die CPML-Technik (convolutional perfectly matched layers) angewendet. Diese Technik dient der Absorption der elastischen Volumenwellen und der Rayleigh- (Oberflächen-) Wellen. Die verwendeten Materialparameter

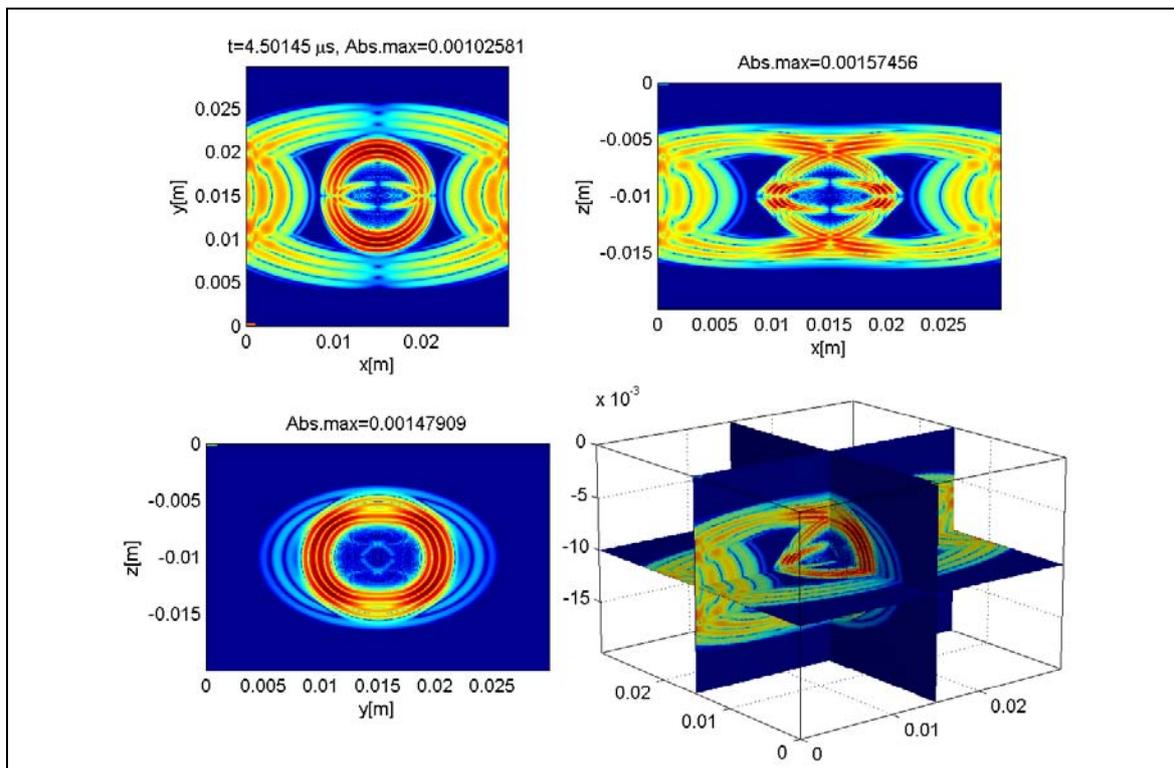


### 3.1 Modellierung der elastischen Wellenausbreitung in homogenen Kiefernholz-Testkörpern

Die Gruppengeschwindigkeiten in den Kristallebenen von Kiefernholz sind in Abbildung 10 dargestellt. Die benutzten Materialparameter wurden bei der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM, Berlin) ermittelt. 3D-EFIT-Berechnungen der elastischen Wellenausbreitung sind in Bild 11 wiedergegeben. Eine Punktquelle dient der Anregung einer horizontalen impulsförmigen Kraft durch die Anregung der  $v_1$ -Geschwindigkeitskomponente (parallel zur Faserrichtung des Holzes). Die Wellenausbreitung in Holz ist sehr komplex. Es gibt einen großen Unterschied zwischen den schnellen und langsamen Wellenmoden. Es können Wellen entstehen, die sich mit ca. 5200 m/s und mit 450m/s ausbreiten.



**Abbildung 8:** Gruppengeschwindigkeitsdiagramme berechnet durch Lösung des Eigenwertproblems für ebene Wellen



**Abbildung 9:** 3D-EFIT-Ergebnis: Momentaufnahmen des elastischen Wellenfeldes

## 4. Zusammenfassung

Eine Validierung von 3D-EFIT wurde gezeigt. Die Ergebnisse der analytischen Lösung stimmen mit der 3D-EFIT-Lösung überein. Die elastische Wellenausbreitung in Geometrien aus anisotropem Material mit rotierten Kristallen und mehrdimensionalen Inhomogenitäten kann mit 3D-EFIT effizient modelliert werden. Die CPML-Technik für absorbierende Schichten zeigt sich als sehr effektiv für elastische Raumwellen und für Rayleigh-Wellen. Die Modellierung von elastischen Wellen in austenitischen Schweißnähten und in homogen-anisotropem Kiefernholz wurde präsentiert. Weitere Ergebnisse von zweidimensionalen Effekten innerhalb von anisotropen Materialien unter Anwendung der CPML-Technik und die Anwendung der CPML-Technik für anisotrope Materialien sollen in der Zukunft untersucht werden.

## Appendix

Die in den vorherigen Abschnitten benutzten Materialparameter sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

**Tabelle 1:** Materialparameter

	$C_{11}$ [GPa]	$C_{22}$ [GPa]	$C_{33}$ [GPa]	$C_{44}$ [GPa]	$C_{55}$ [GPa]	$C_{66}$ [GPa]	$C_{23}$ [GPa]	$C_{13}$ [GPa]	$C_{12}$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Material A in Fig (4a): Stahl	275.81	275.81	275.81	83.126	83.126	83.126	109.56	109.56	109.56	7870
Material B in Fig (4a): Stahl	246.85	246.85	246.85	75.92	75.92	75.92	95.01	95.01	95.01	7900
Austenitischer Stahl	262.75	262.75	216.0	129.0	129.0	82.5	145.0	145.0	98.25	7800
Kiefer	10.20	2.472	0.903	0.073	0.683	0.925	1.393	1.785	2.864	383
Fichte	10.88	2.197	0.706	0.077	0.812	0.883	1.099	1.364	3.168	408

Danksagung: Die Autoren möchten Dr. Martin Krause (BAM, Berlin) und Sabine Müller (BAM, Berlin) für ihre Unterstützung danken.

## Referenzen

- [1] Marklein, R. [1997]: *Numerische Verfahren zur Modellierung von akustischen, elektromagnetischen, elastischen und piezoelektrischen Wellenausbreitungsproblemen im Zeitbereich basierend auf der Finiten Integrationstechnik*, Shaker Verlag, Aachen, Germany.
- [2] Langenberg, K. J., R. Marklein, K. Mayer [2009]: *Theoretische Grundlagen der zerstörungsfreien Materialprüfung mit Ultraschall*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München, Germany, 2009.
- [3] Wang, C.-Y., J. D. Achenbach [1995]: Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids, Proc. R. Soc. Lond. A 449 (441-458).
- [4] Fellingner, P., R. Marklein, K. J. Langenberg, S. Klaholz [1995]: Numerical modelling of elastic wave propagation and scattering with EFIT - elastodynamic finite integration technique, Wave Motion 21 47-46.
- [5] Newmann, E. und 4 Mitautoren [1995]: *Ultraschallprüfung von austenitischen Plattierungen, Mischnähten und austenitischen Schweißnähten, 2nd Edition*, Expert Verlag, Renningen-Malmsheim, Germany.
- [6] Musgrave, M.J.P. [1970]: *Crystal Acoustics, Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals*, Holden-Day, San Francisco, USA.
- [7] Bucur, V. [2006]: *Acoustics of Wood, 2nd Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany.
- [8] Bucur, V., Lanceleur, P., Roge B. [2002]: Acoustic properties of wood in tridimensional representation of slowness surfaces, Ultrasonics 40(2002) 537-541.